ANNEE 1979

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(durée : 3 h 00 - coefficient : 7)

---==oOOo==---

Dans ce problème on se propose d'étudier quelques propriétés des fonctions P_n et Q_n de la variable réelle x définies par les relations :

$$P_n(x) = \frac{1}{2i}\left[(x+i)^n - (x-i)^n \right]$$

$$Q_n(x) = \frac{1}{2}\left[(x+i)^n + (x-i)^n \right]$$

où :

n est un entier positif ou nul et i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$

I.

1. Montrer que P_n et Q_n sont des polynômes à valeurs dans $\mathbb{R}$, de degrés respectifs (n - 1) et n dont les termes sont de même parité (on suggère de poser z = x + i).

2. Calculer $P_n(0)$ et $Q_n(0)$.

3. Expliciter les coefficients des polynômes P_n et Q_n. Former, en particulier, l'expression des polynômes P_k et Q_k pour (k = 0), (k = 1), (k = 2), (k = 3).

4. Etablir la relation qui lie $P_n(x)$ et $P_n(-x)$ d'une part, celle qui lie $Q_n(x)$ et $Q_n(-x)$ d'autre part.

5. Déterminer les zéros de P_n et Q_n.

II. En travaillant sur la fonction :

$$x \longmapsto i^n \cdot \left[Q_n(x) - iP_n(x) \right]$$

Etablir les relations :

$$x^n \cdot P_n\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\frac{n\pi}{2} \cdot Q_n(x) - \cos\frac{n\pi}{2} \cdot P_n(x)$$

$$x^n \cdot Q_n\left(\frac{1}{x}\right) = \cos\frac{n\pi}{2} \cdot Q_n(x) + \sin\frac{n\pi}{2} \cdot P_n(x)$$

III Etablir la relation qui lie $P_n'(x)$ et $P_{n-1}(x)$ ainsi que celle qui existe entre $Q_n'(x)$ et $Q_{n-1}(x)$.

Calculer les intégrales :

$$\int_0^x P_n(t)\,dt, \qquad \int_0^x Q_n(t)\,dt,$$

$$\int_0^x t^n \cdot P_n\left(\frac{1}{t}\right) dt, \qquad \int_0^x t^n \cdot Q_n\left(\frac{1}{t}\right) dt.$$

.../...

IV On pose : $x = \operatorname{cotg}\phi$

Calculer $P_n(\operatorname{cotg}\phi)$ et $Q_n(\operatorname{cotg}\phi)$ et retrouver les valeurs des zéros de P_n et Q_n.

V En utilisant les résultats des paragraphes précédents, calculer les intégrales :

$$\int_\lambda^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin n\phi}{\sin^{n+2}\phi}\, d\phi \qquad \int_\lambda^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos n\phi}{\sin^{n+2}\phi}\, d\phi \qquad (n \in \mathbb{N})$$

où λ est un réel <u>strictement</u> positif ($\lambda > 0$).

VI. On pose :

$$f(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k . P_k(x) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

$$g(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k . Q_k(x)$$

En supposant que les séries envisagées ont un rayon de convergence non nul et que t est intérieur à l'intervalle de convergence de chacune, former :

$$g(t,x) + i\, f(t,x)$$

Montrer que cette nouvelle série converge, pour x fixé, lorsque :

$$|t| < \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

et en calculer la somme.

Déduire des résultats précédents les expressions de f(t,x) et g(t,x) lorsque :

$$|t| < \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

VII. Désignant par z un nombre complexe et par $\bar{z}$ son conjugué, on a :

$$z^{n+1} = z^n(z + \bar{z}) - z^{n-1}\, z\, \bar{z} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Déduire de cette écriture que les polynômes P_n et Q_n vérifient une même relation de récurrence de la forme :

$$y_n(x) - 2x.y_{n-1}(x) + (x^2+1).y_{n-2}(x) = 0 \qquad (n \geqslant 2)$$

VIII. En utilisant les résultats des paragraphes III et VII, montrer que P_n et Q_n sont des solutions particulières de l'équation différentielle :

$$(E)\ (x^2+1)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x(n-1)\frac{dy}{dx} + n(n-1)\,y = 0$$

Former l'intégrale générale de cette équation.

IX. On suppose maintenant que dans l'équation (E) n est un réel quelconque et l'on se propose d'en former l'intégrale générale.

1. Montrer que (E) peut s'écrire :

$$\frac{d}{dx}\left[(x^2+1)^{-n+1}\frac{dy}{dx}\right] + n(n-1)\,(x^2+1)^{-n}.y = 0$$

2. On fait le changement de fonction inconnue :

$$y(x) = (x^2+1)^{\frac{n}{2}}.u(x)$$

Former l'équation différentielle (E') que vérifie la nouvelle fonction inconnue u.

3. Intégrer l'équation (E') en faisant le changement de variable :

$$x = \operatorname{cotg}\phi$$

En déduire l'intégrale générale de l'équation (E) pour n réel quelconque.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail